

# CONFIGURAÇÕES DIFERENCIADAS DE RISCO NA OTIMIZAÇÃO DE PORTFOLIOS: ESTUDO SOBRE OS EFEITOS NO GRAU DE DIVERSIFICAÇÃO E DESEMPENHO DE AÇÕES NEGOCIADAS NA BOVESPA

**Ivan Ricardo Gartner**

Doutor em Engenharia de Produção

Programa Multiinstitucional e Inter-Regional de Pós-Graduação em Ciências Contábeis

Universidade de Brasília

Campus Universitário Darcy Ribeiro – Asa Norte

Faculdade de Administração, Economia, Contabilidade e Ciências da Informação e

Documentação – FACE

70.910-900 – Brasília – DF

E-mail: irgartner@unb.br

Tel.: (61) 3307-2437

## RESUMO

Este artigo explora as configurações diferenciadas de risco que podem ser proporcionadas pela entropia, sob o ponto de vista de suas repercussões no grau de diversificação e no desempenho de portfólios de investimento. Este estudo apresentou a adaptação dos modelos de entropia relativa mínima e de entropia máxima ao problema da otimização de portfólios e comparou seus resultados com aqueles obtidos pelo modelo clássico de Markowitz. Os portfólios foram compostos por uma amostra de quatorze ações do IBOVESPA, projetados para o período de janeiro de 2007 a dezembro de 2009 e consideraram as matrizes de covariâncias com base-fixa em janeiro de 1999. Os resultados atestaram a superioridade do modelo de Markowitz no quesito de desempenho e confirmaram sua dificuldade em alcançar um maior grau de diversificação, algo que foi alcançado pelo modelo de entropia máxima.

**Palavras-chave:** Diversificação de investimentos; Modelos de otimização de portfólios; Modelos de otimização entrópica.

## 1 INTRODUÇÃO

O modelo de seleção de portfólios de títulos proposto por Markowitz (1952) deu início à Moderna Teoria do Portfólio, que se tornou um divisor de águas no campo de finanças. Antes da proposta de Markowitz, predominavam os modelos fundamentados na idéia da existência de um portfólio ótimo obtido através da maximização do retorno esperado, na maioria das vezes composto por somente um título. Markowitz argumentou que essa idéia era equivocada, pois havia uma alta exposição à variabilidade de um único título e comprovou matematicamente que os investidores deveriam diversificar seus portfólios, a fim de reduzir seu risco, dada a existência de um conjunto de portfólios que combinam retornos mais altos com determinados níveis de risco, formando uma fronteira eficiente.

A obtenção dessa fronteira eficiente seria possível em função de múltiplas combinações de títulos, a serem obtidas através de modelos de programação matemática, cujos insumos seriam unicamente as medidas de valor esperado e risco dos portfólios propostos, coletadas a partir das séries de retornos dos títulos analisados. Isso fez com que essa abordagem fosse caracterizada como a análise média-variância (AMV), dado que a média se refere ao valor esperado e a variância é a forma de se mensurar o risco.

Alguns anos após ter feito essa proposta, o próprio Markowitz (1959) reconheceu as limitações de se considerar a variância como medida de risco, pois uma medida simétrica sugere as mesmas penalidades para os desvios acima e abaixo da média. As críticas mais

contundentes a essa deficiência foram feitas por Sharpe (1963, 1964), que culminaram com a proposta do *Capital Asset Pricing Model*.

Autores como Bawa (1982), Ogryczak e Ruszczynski (1999) apresentaram modelos de otimização de portfólios que consideram medidas de risco assimétrico, tais como a expectativa de perdas e a semivariância. Nessa mesma linha lógica, Steinbach (2001) apresenta uma revisão sobre esses modelos e propõe metodologias de *downside risk* aplicadas a situações de períodos múltiplo através de modelos de programação dinâmica.

Diante de tantas alternativas para modelagem de risco na otimização de portfólios, surgem várias dúvidas acerca de suas legitimidade, utilidade e aplicabilidade. Em especial, uma questão que vem à tona é sobre a aderência desses modelos alternativos ao pressuposto básico do modelo clássico de Markowitz, que diz respeito ao conceito de diversificação como forma de controle da relação de risco e retorno no processo de otimização.

Essa questão é relevante, pois de acordo com Rubinstein (2002), o aspecto mais importante do trabalho de Markowitz foi mostrar que não é propriamente o risco do título que é importante para o investidor e sim a contribuição que o título traz à variância total do portfólio, a partir de sua covariância com todos os outros títulos nele incluídos.

Em função dessa questão é que alguns autores têm procurado meios alternativos de se modelar o risco na otimização de portfólios, que sejam mais coerentes com o princípio da diversificação. Essa é a proposta dos estudos derivados da teoria da comunicação de Shannon (1948), que associam a otimização entrópica à seleção de portfólios, como pode ser visto em Hua e Xingsi (2003) e Bera e Park (2008).

Diante dessa questão de aderência dos modelos de otimização de portfólios aos preceitos da diversificação, este artigo tem como objetivo explorar as configurações diferenciadas de risco que podem ser proporcionadas pela entropia, sob o ponto de vista de suas repercussões no grau de diversificação e no desempenho de portfólios de investimento.

O alcance desse objetivo requer uma análise comparativa entre os modelos que incluem a entropia em sua formulação e o modelo clássico de Markowitz. Como contribuição deste artigo, são propostas adaptações aos modelos de entropia relativa mínima e de entropia máxima, a fim de que os mesmos possam ser aplicados à otimização de portfólios de investimento.

A análise comparativa tomou por base indicadores de desempenho, como o índice de Sharpe e os parâmetros Alfa e Beta, e um índice do grau de diversificação de portfólios. Os portfólios foram compostos considerando uma amostra de quatorze ações que compõem o IBOVESPA, foram projetados para o período de janeiro de 2007 a dezembro de 2009 e consideraram as matrizes de covariâncias formadas a partir de janeiro de 1999. Isso permitiu que as matrizes de covariâncias capturassem as diversas facetas do comportamento do mercado de ações, notadamente as fases *Bull*, *Bear* e *Flat*, com os correspondentes momentos de *Rally*, *Consolidação* e *Correção*.

O artigo está estruturado em quatro sessões. Esta primeira sessão trata do tema, problemática e objetivos. A segunda sessão apresenta o referencial teórico do modelo clássico de Markowitz e dos modelos baseados na entropia, bem como sua aderência à teoria do portfólio. A terceira sessão apresenta a análise empírica relativa à aplicação dos modelos propostos, com foco na análise comparativa da adequação aos princípios de diversificação e repercussões no desempenho dos portfólios. A quarta sessão apresenta as considerações finais e recomendações de novos estudos.

## **2 MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS: DE MARKOWITZ À OTIMIZAÇÃO ENTRÓPICA**

A gestão de portfólios de investimento tem se deparado com problemas crescentes, visto que os mercados financeiros têm apresentado uma exposição cada vez maior a fatores

exógenos e endógenos, o que corresponde a períodos de instabilidade sem precedentes. Nesse contexto, a seleção de portfólios é um ponto crítico na gestão investimentos de qualquer classe de investidores, sejam fundos mútuos, firmas de investimento, companhias de seguros, organizações financeiras e não-financeiras, organizações com ou sem fins lucrativos e investidores individuais em geral.

A análise de média-variância proposta por Markowitz (1952) fornece um mecanismo para a seleção de portfólios de títulos, que é fundamentado nas combinações de retornos esperados e risco. A concepção básica do modelo prevê a tomada de decisão no regime mono-período, isto é, do instante  $t_0$  para o instante  $t_1$  e é voltada para títulos de renda variável. Nos 50 anos após a publicação do modelo de Markowitz, podem ser encontrados no meio acadêmico-científico internacional centenas de artigos, que foram escritos na tentativa de superar as deficiências teóricas e práticas do modelo clássico, propor extensões e novas aplicações ao problema de seleção de portfólios de títulos.

### 2.1 Modelo clássico de Markowitz: análise de média-variância (AMV)

O modelo clássico de Markowitz (1987) requer insumos que são extraídos das séries de preços de mercado dos títulos analisados. A partir dessas séries de preços, são calculados os retornos esperados e variâncias, bem como as covariâncias entre os títulos.

Da série de preços do  $i$ -ésimo título são calculados os retornos aleatórios periódicos, que são dados por  $r_{it}$ ,  $i=1,\dots,n$ ,  $t=1,\dots,T$ , obtidos pela formulação contínua  $r_{it} = \ln(v_{it}) - \ln(v_{i,t-1})$ , onde  $v_{it}$  refere-se ao preço do  $i$ -ésimo título no período  $t$ . O cálculo do retorno esperado do  $i$ -ésimo título pode ser definido como a média geométrica de seus retornos:

$$(1) \quad \bar{r}_i = E(r_i) = \left[ \prod_{t=1}^T (1 + r_{it}) \right]^{1/T} - 1$$

e o conjunto de retornos esperados dos vários títulos  $i$  forma o vetor:

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_n \end{pmatrix}$$

Markowitz afirmava que não era suficiente considerar as características individuais dos títulos, dado que a formação de portfólios deveria considerar a forma como os títulos se movimentam conjuntamente ao longo do tempo. A covariância  $\sigma_{ij}$  é a medida básica de variabilidade conjunta entre dois títulos  $i$  e  $j$ , e é calculada por:

$$(2) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} = E[(r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j)] = 1/T \cdot \sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j)$$

sendo que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , quando  $i \neq j$  e  $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ , quando  $i = j$ . Se os retornos dos títulos  $i$  e  $j$  moverem-se na mesma direção, tem-se que  $\sigma_{ij} > 0$ ; caso contrário, tem-se que  $\sigma_{ij} < 0$ . A importância dessa medida de variabilidade conjunta é o trunfo da diversificação proposta por Markowitz, cujo objetivo é o de combinar títulos que se movem em direções contrárias, para que a queda no preço de um título no portfólio seja compensada pela ascensão no preço de outro título do mesmo portfólio.

Em termos agregados, as relações paritárias de  $n$  ativos são incorporadas na matriz de covariâncias  $\mathbf{V}$ :

$$(3) \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Na composição de um determinado portfolio  $p$ , a participação do  $i$ -ésimo título é representada por  $w_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , sendo que  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . Essas participações são positivas ( $w_i \geq 0$ ), quando não são consideradas vendas a descoberto, e podem ser negativas, em caso contrário. O conjunto de participações dos títulos  $i$  no portfolio forma o vetor:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

O retorno esperado do portfolio para  $n$  títulos pode ser assim expresso:

$$(4) \quad \bar{r}_p = E(r_p) = E\left(\sum_{i=1}^n r_i w_i\right) = \sum_{i=1}^n E(r_i) w_i = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i w_i$$

que assume a forma matricial:

$$(4') \quad \bar{r}_p = \mathbf{w}' \bar{\mathbf{r}}$$

onde  $\bar{\mathbf{r}}$  é o vetor de retornos esperados dos títulos analisados.

A medida de risco do portfolio formado por  $n$  títulos é derivada das relações paritárias entre os títulos do portfolio, ponderadas por seus respectivos pesos, podendo ser assim calculada:

$$\sigma_p^2 = E(r_p - \bar{r}_p)^2,$$

para  $i = j$ , tem - se

$$\sigma_p^2 = E\left[\sum_{i=1}^n w_i (r_i - \bar{r}_i)\right]^2,$$

e para  $i \neq j$ , tem - se

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma_p^2 &= E\left[\sum_{i=1}^n w_i (r_i - \bar{r}_i) \sum_{j=1}^n w_j (r_j - \bar{r}_j)\right] \\ \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j E[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)] \\ \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

Em termos matriciais, a covariância do portfolio pode ser calculada por

$$(5') \quad \sigma_p^2 = \mathbf{w}' \mathbf{V} \mathbf{w},$$

onde  $\mathbf{w}$  é o vetor de pesos,  $\mathbf{w}'$  é o vetor de pesos transposto e  $\mathbf{V}$  é a matriz de covariâncias anteriormente definida. Para o cálculo do desvio-padrão, basta resolver  $\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}' \mathbf{V} \mathbf{w}}$ .

A construção dos portfolios ótimos sugerida por Markowitz pode ser feita por meio de modelos de programação matemática, que são formulados a partir de combinações entre risco e retorno dos títulos. O modelo básico de otimização de portfolios, que utiliza programação quadrática, baseia-se na minimização do risco do portfolio dado um determinado nível de retorno esperado:

$$(6) \quad \begin{aligned} \min_w \sigma_p^2 &= \mathbf{w}' \mathbf{V} \mathbf{w} \\ \text{s.a.:} \quad \mathbf{w}' \bar{\mathbf{r}} &\geq \bar{r}_{pd} \\ \mathbf{w}' \mathbf{u} &= 1 \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{u}$  é um vetor unitário:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\bar{r}_{pd}$  é o nível de retorno desejado para o portfolio. A resolução desse modelo para valores de  $\bar{r}_{pd}$  no intervalo entre  $\bar{r}_{p\min}$  e  $\bar{r}_{p\max}$  resulta em todos os portfolios eficientes. Uma solução possível para o modelo pode ser encontrada pelos multiplicadores de Lagrange:

$$(7) \quad L(w, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} - \lambda_1(\mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} - \bar{r}_{pd}) - \lambda_2(\mathbf{w}'\mathbf{u} - 1)$$

O modelo (6) pode ser rearranjado, a fim de combinar o retorno esperado máximo para o mesmo nível de risco, resultando na seguinte formulação de programação não-linear:

$$(8) \quad \begin{aligned} \max_w \bar{r}_p &= \mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} \\ \text{s.a. :} \quad \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} &\leq \sigma_d^2 \\ \mathbf{w}'\mathbf{u} &= 1 \end{aligned}$$

onde  $\sigma_d^2$  é o nível de risco desejado e uma solução possível pode ser encontrada pelos multiplicadores de Lagrange:

$$(9) \quad L(w, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} - \lambda_1(\mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} - \sigma_d^2) - \lambda_2(\mathbf{w}'\mathbf{u} - 1)$$

O modelo (6) também pode ser rearranjado, a fim de se incorporar um coeficiente de aversão ao risco, o que resulta na formulação de programação quadrática:

$$(10) \quad \begin{aligned} \max_w \bar{r}_p - \delta \sigma_p^2 &= \mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} - \delta \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} \\ \text{s.a. :} \quad \mathbf{w}'\mathbf{u} &= 1 \end{aligned}$$

onde  $\delta$  é a constante de aversão ao risco e uma solução possível pode ser encontrada pelos multiplicadores de Lagrange:

$$(11) \quad L(w, \lambda_1) = \mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} - \delta \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} - \lambda_1(\mathbf{w}'\mathbf{u} - 1)$$

Em todos os casos (6), (8) e (10), deve ser inserida a restrição de  $w_i \geq 0$  para as situações em que as vendas a descoberto não são permitidas.

## 2.2 Extensão do modelo de Markowitz: o modelo de Sharpe

Uma preocupação que segue à otimização de portfolios é a definição de instrumentos de controle de seu desempenho. Sharpe (1966) identificou uma carência de metodologias específicas para medir o desempenho de portfolios, especialmente em se tratando de fundos mútuos. A proposta de Sharpe foi de criar um índice que refletia o excesso de retorno do portfolio por unidade de risco ( $\theta = E(r_p) - r_f / \sigma$ ). Como o excesso de retorno é sobre o ativo livre de risco ( $r_f$ ), esse índice recai sobre o ponto em que a linha de alocação de capital (LAC) tangencia a fronteira eficiente do portfolio. Por isso, esse índice também pode ser utilizado na otimização de portfolios, da seguinte forma:

$$(12) \quad \begin{aligned} \max_w \theta &= (\bar{r}_p - r_f) / \sigma_p = (\mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} - r_f) / \sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w}} \\ \text{s.a. :} \quad \mathbf{w}'\mathbf{u} &= 1 \end{aligned}$$

A resolução desse problema resulta no portfolio com o índice de Sharpe máximo, que é aquele com a mais alta relação de risco e retorno dentre os ativos, conhecido como o portfolio de risco ótimo. Esse problema pode ser resolvido pela seguinte formulação de Lagrange:

$$(13) \quad L(w, \lambda_1) = \left[ (\mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} - r_f) / \sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w}} \right] - \lambda_1(\mathbf{w}'\mathbf{u} - 1)$$

O retorno esperado para esse portfólio ótimo pode ser utilizado na definição do retorno esperado desejado ( $r_{pd}$ ), que condiciona a otimização dos portfólios a apresentar um dado nível de desempenho.

### 2.3 Modelagem de entropia como medida de risco na seleção de portfólios

A entropia é um conceito abordado originalmente por Ludwig Boltzmann, o qual fundamenta a Segunda Lei da Termodinâmica e é associado ao grau de desordem dos sistemas termodinâmicos. Shannon (1948) estendeu tal conceito à teoria da informação, quando passou a utilizar a entropia para descrever a quantidade de informação sobre o estado de um determinado sistema ou evento.

O estudo de Philippatos e Wilson (1972) foi um dos pioneiros na tentativa de associar a Entropia de Shannon à mensuração do risco na otimização de portfólios. Em sua proposta, o modelo de otimização entrópica considerou a combinação de probabilidades conjuntas e condicionais dos retornos dos ativos, como forma de se obter o sistema de ponderações do portfólio, cuja validade foi atestada em uma análise empírica que contou com uma amostra de 50 ações selecionadas aleatoriamente da NYSE e do índice Dow Jones Industrial no período de janeiro de 1957 a dezembro de 1970. Essa forma de otimização baseada na entropia foi severamente criticada por White (1974), cujo ponto principal de sua contestação dizia respeito ao fato de que a entropia do portfólio seria independente do sistema de ponderações, o que não justificaria sua aplicação. No entanto, Philippatos e Wilson (1974) teceram comentários tecnicamente sustentáveis na justificativa de sua proposta, provando de uma forma simples que a entropia de um portfólio é uma função das ponderações atribuídas aos seus elementos.

Após a polêmica, essa corrente de estudos sobre a entropia aplicada à seleção de portfólios parece ter perdido um pouco de sua força, pois como os próprios Philippatos e Wilson (1974, p. 215) afirmaram: "... dentre as desvantagens das medidas da teoria da informação para a teoria de finanças estão: (1) a medida de incerteza ou entropia não foi integrada filosoficamente às disciplinas de economia, embora ela tenha sido parcialmente integrada nas teorias da escolha, de conflitos e do comportamento geral, que são tipicamente exploradas pelos cientistas sociais ...".

Atualmente, podem ser encontrados na literatura vários textos procurando ressuscitar essa temática, inclusive no Brasil. Cassettari (2003) apresentou um modelo de otimização da entropia, que considerou a aplicação da mesma metodologia proposta por Philippatos e Wilson (1972). No entanto, embora os resultados preliminares tenham atestado para a viabilidade do modelo, o texto teve pouca preocupação com a legitimidade da análise empírica e em avaliar as repercussões do modelo em termos de desempenho.

As preocupações mais recentes que têm estimulado a retomada das preocupações com a otimização entrópica aplicada à seleção de portfólios diz respeito ao fato de que, muitas das extensões ao modelo clássico de Markowitz, incluindo o próprio modelo de Markowitz, não têm apresentado soluções convergentes com o princípio da diversificação. De acordo com Hua e Xingsi (2003) e Bera e Park (2008), a entropia é uma medida alternativa para tratar da situação na qual a otimização baseada na análise média-variância contraria a noção da diversificação, freqüentemente levando os portfólios a uma alta concentração de pesos em um pequeno número de títulos.

### 2.4 Modelos de otimização de portfólios com a inclusão da entropia

Pelo conceito de Shannon (1948), a entropia  $H(X)$  pode ser definida como a quantidade de informação disponível sobre o estado de um sistema  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , com um vetor de probabilidades  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  [ $P(x) = (p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_n(x_n))$ ], onde  $p_i(x_i) \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^n p_i(x_i) = 1$ , o que justifica seu uso como uma medida de incerteza. Logo, a entropia  $H(X)$  de uma variável aleatória  $X$  é definida pela equação:

$$(14) \quad H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i(x_i) \ln p_i(x_i)$$

Como  $H(X)$  fornece uma medida de desordem em um sistema, ou no valor esperado em uma distribuição de probabilidade, a entropia pode ser tomada como uma medida do grau de diversificação de um portfólio. Para tanto, considerando-se que  $p_i(x_i)$  pode ser substituído pelo peso  $w_i$ , o valor de  $H(X)$  é zero se o portfólio é composto de somente um ativo e o valor é máximo para um portfólio de distribuição uniforme ( $p_i(x_i)=w_i=1/n$ ).

Essa interpretação é fundamentada na propriedade 2 da parte 6 (*Choice, Uncertainty and Entropy*) do estudo de Shannon (1948, p. 388), que afirma que "... se todos os  $p_i(x_i)$  são iguais ( $p_i(x_i)=1/n$ ), então  $H(X)$  deveria ser uma função monotônica crescente em função de  $n$ . Com eventos igualmente prováveis, existe mais escolha, ou incerteza, se existirem mais eventos possíveis ...". Esses conceitos são coerentes com os preceitos de diversificação propostos por Markowitz, o que justifica os estudos sobre o uso da entropia na otimização de portfólios.

Embora o estudo de Philippatos e Wilson (1972) apresentou uma forma de cálculo da entropia conjunta dos retornos dos ativos, tal formulação se mostrou completamente independente do modelo clássico de Markowitz. Sendo assim, Hua e Xingsi (2003) apresentaram uma proposta de formulação pela qual a entropia representa um fator de encolhimento dos pesos na função-objetivo, do seguinte modo:

$$(15) \quad \begin{aligned} \min_w \sigma_p^2 - \psi \sum_{i=1}^n w_i \ln w_i &= \mathbf{w}' \mathbf{V} \mathbf{w} - \psi \mathbf{w}' \ln \mathbf{w} \\ \text{s.a.:} & \mathbf{w}' \bar{\mathbf{r}} \geq \bar{r}_{pd} \\ & \mathbf{w}' \mathbf{u} = 1 \end{aligned}$$

onde  $\psi$  ( $\psi \geq 0$ ) é um fator momentâneo para ajustar o efeito da entropia no modelo. Quanto maior for o valor de  $\psi$ , maior o efeito da entropia no modelo, pois há uma gradual redução do valor da função-objetivo; se  $\psi=0$ , tem-se unicamente a otimização pelo modelo original de Markowitz. A inclusão de  $\psi$  baseia-se na proposta de Shannon (1948, p. 389), que apresenta uma forma alternativa de cálculo da entropia  $H$ , com  $H(X) = -K \sum_{i=1}^n p_i(x_i) \ln p_i(x_i)$ , onde  $K$  é uma constante positiva para ajuste de medida. Uma solução de (15) por Lagrange pode ser:

$$(16) \quad L(w, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{w}' \mathbf{V} \mathbf{w} - \psi \mathbf{w}' \ln \mathbf{w} - \lambda_1 (\mathbf{w}' \bar{\mathbf{r}} - \bar{r}_{pd}) - \lambda_2 (\mathbf{w}' \mathbf{u} - 1)$$

Seguindo essa mesma lógica, a entropia poderia ser incorporada nos modelos apresentados pelas equações (8) e (10), de acordo com o foco da análise. Outra questão importante com relação à incorporação da entropia nas funções-objetivo, diz respeito ao fato de que o modelo não permite as vendas descoberto por limitações matemáticas óbvias, sendo necessária a inclusão da restrição  $w_i \geq 0$ .

## 2.5 Modelos de otimização entrópica aplicados à seleção de portfólios: uma contribuição

O modelo demonstrado em (15) apresenta a inclusão da entropia na função-objetivo do modelo clássico de Markowitz, cujo cálculo entrópico refere-se somente ao vetor de pesos  $\mathbf{w}$ . O maior problema associado a esse tipo de formulação é sua sensibilidade à magnitude do valor de  $\psi$ , pois quanto mais esse parâmetro se afastar de zero (lembrando que  $\psi \geq 0$ ), maior o impacto da entropia na função-objetivo. Como a definição desse parâmetro é subjetiva, sua legitimidade pode ser questionada, pois a distribuição de pesos do portfólio seria diretamente afetada pelas preferências e valores dos decisores.

Como a revisão da literatura ainda apresenta lacunas na forma como a entropia pode ser incorporada nos problemas de otimização de portfólios, este artigo procura contribuir apresentando duas propostas metodológicas alternativas para inclusão da entropia na otimização de portfólios. A primeira delas, trata de apresentar um modelo de otimização

entrópica focado no vetor de pesos, que é condicionado por um nível desejado de retorno, utilizando o princípio da entropia relativa mínima. A segunda delas, trata de um modelo de otimização entrópica que conjuga o vetor de pesos com o vetor de retornos de cada ativo analisado, considerando o princípio da entropia máxima.

### 2.5.1 Modelo de entropia relativa mínima aplicada à otimização de portfolios

A entropia relativa  $R(Q, P^0)$ , ou divergência de Kullback-Leibler entre duas distribuições  $P^0$  e  $Q$ , é definida pela relação

$$(17) \quad R(Q, P^0) = \sum_{i=1}^n Q(x_i) \ln Q(x_i) / P^0(x_i)$$

e mede a ineficiência de se assumir que uma variável aleatória tem distribuição  $P^0$ , quando sua distribuição verdadeira é  $Q$ , sendo que  $P^0$  é a distribuição *a priori*, para a qual a distribuição de probabilidade é uniforme e, por isso, de entropia máxima, e  $Q$  é a distribuição *a posteriori*. De acordo com Rödder (2000), essa distribuição  $Q$  é obtida a partir do acréscimo de informação no sistema em análise, pois  $Q$  é uma distribuição sujeita a  $Q | = R$ , sendo que  $R$  é o conjunto de restrições probabilísticas, que diferenciam as distribuições  $P^0$  e  $Q$ , ou  $R = \{B_i | A_i[x_i], i=1, \dots, I\}$ . Dessa forma, a distribuição condicional  $Q \{Q(B_i | A_i) = x_i, i=1, \dots, I\}$ , pode ser calculada a partir de  $P^0$  e  $R$ , através do seguinte problema de otimização:

$$(18) \quad \underset{x}{\text{Min}} R(Q, P^0) = \sum_{i=1}^n Q(x_i) \ln Q(x_i) / P^0(x_i)$$

Essa formulação caracteriza o princípio da entropia relativa mínima, que pode ser adaptado para a problemática da otimização de portfolios. Nessa adaptação, parte-se de uma distribuição uniforme do vetor de pesos  $\mathbf{w}^0$  ( $P^0(w_i^0)$ ) e formula-se um modelo com o objetivo de minimizar a entropia relativa entre esse vetor de pesos  $\mathbf{w}^0$  e o novo vetor  $\mathbf{w}^*(Q(w_i))$ , que resultará do acréscimo das restrições ao problema, da seguinte forma:

$$(19) \quad \begin{aligned} \min_w \quad & \sum_{i=1}^n Q(w_i) \ln Q(w_i) / P^0(w_i^0) \\ \text{s.a.:} \quad & \mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} \geq \bar{r}_{pd} \\ & \mathbf{w}'\mathbf{u} = 1 \end{aligned}$$

que pode ser solucionada por Lagrange com:

$$(20) \quad L(w, \lambda_1, \lambda_2) = \left[ \sum_{i=1}^n Q(w_i) \ln Q(w_i) / P^0(w_i^0) \right] - \lambda_1 (\mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} - \bar{r}_{pd}) - \lambda_2 (\mathbf{w}'\mathbf{u} - 1)$$

Como nessa formulação opera-se com logaritmos neperianos, esse tipo de problema não acomoda as vendas a descoberto, sendo necessária a inclusão da restrição  $w_i \geq 0$ .

### 2.5.2 Modelo de entropia máxima aplicada à otimização de portfolios

Enquanto que o modelo (19) trata da entropia associada somente aos pesos do portfolio, também pode-se focar a entropia especialmente a partir da dispersão dos retornos aleatórios  $r_{it}$ . Tomando por base a idéia do modelo proposto por Philippatos e Wilson (1972), mas seguindo procedimentos metodológicos alternativos, pode-se extrair o vetor de pesos  $\mathbf{w}$  a partir de sua combinação com o grau de desordem dos retornos aleatórios  $r_{it}$ .

Jessop (1999) desenvolveu um modelo de otimização entrópica para resolver esse tipo de questão, quando procurava soluções para problemas de avaliação multi-atributos considerando a dispersão dos vetores de desempenho das alternativas, partindo da seguinte formulação da entropia de um vetor arbitrário  $\mathbf{x}$ :

$$(21) \quad H(X) = \ln \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) - \left[ \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) / \sum_{i=1}^n x_i \right]$$

A adaptação dessa formulação à otimização de portfolios pode assumir a forma:

$$(22) \quad \begin{aligned} \max_w \quad & H(R) = \ln \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_j a_j(r_{it}) \right) - \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^m w_j a_j(r_{it}) \cdot \ln \sum_{j=1}^m w_j a_j(r_{it}) \right] / \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_j a_j(r_{it}) \right\} \\ \text{s.a.:} \quad & \mathbf{w}'\mathbf{u} = 1 \end{aligned}$$



onde  $a_j(r_{it}) = r_{it} - r_{i,\min} / r_{i,\max} - r_{i,\min}$  e refere-se à normalização dos retornos aleatórios  $r_{it}$ . Essa normalização é um requisito para esta modelagem, pois os retornos podem assumir valores negativos, enquanto que as operações com entropia requerem números não-negativos. Por essa razão, esse modelo também se aplica somente a casos em que não são permitidas vendas a descoberto ( $w_j \geq 0$ ). Esse problema de otimização não-linear pode ser resolvido por Lagrange, da seguinte forma:

$$(23) \quad L(w, \lambda_1, \lambda_2) = \ln \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_j a_j(r_{it}) \right) - \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m w_j a_j(r_{it}) \cdot \ln \sum_{j=1}^m w_j a_j(r_{it}) \right| / \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_j a_j(r_{it}) \right\} - \lambda_1 (\mathbf{w}'\mathbf{u} - 1)$$

### 3 ANÁLISE EMPÍRICA

#### 3.1 Processo de amostragem e de seleção do período de análise

A análise empírica foi construída tomando por base os retornos de uma amostra de ações que são negociadas à vista na Bolsa de Valores de São Paulo, por considerar que o modelo clássico de Markowitz foi proposto à otimização de portfólios compostos somente por ações.

A amostra de ações foi coletada dentre os títulos que compõem o IBOVESPA, que é o índice mais utilizado como referência do mercado de ações brasileiro. Em 30.03.2010, a carteira teórica do IBOVESPA era constituída por 63 ações. Decidiu-se por uma composição amostral de quatorze ações, o que corresponde a uma amostra de 22% das 63 empresas que compõem o índice. No processo de amostragem, as ações foram selecionadas a partir de um gerador de números aleatórios de distribuição uniforme. Após a seleção aleatória de cada ativo, foi procedida uma análise colateral para verificar se o mesmo havia sido negociado em todos os pontos de coleta de preços no período de análise. Caso o ativo não atendesse a essa condição, era substituído por outro ativo selecionado aleatoriamente, que deveria atender a essa condição. O período de estudo envolveu os meses de janeiro de 1999 a dezembro de 2009, com um total de 132 observações para cada ação. Com a finalidade de operacionalizar a pesquisa, o período de estudo foi dividido em dois sub-períodos.

Para o sub-período-base foi selecionado um período de sete anos, de janeiro de 1999 a dezembro de 2006, a fim de que as matrizes de covariância pudessem capturar o comportamento do mercado de ações em suas diversas fases, notadamente as fases *Bull*, *Bear* e *Flat*, com os correspondentes momentos de *Rally*, *Consolidação* e *Correção*. O sub-período experimental perfaz um período de três anos, de janeiro de 2007 a dezembro de 2009, para a composição de portfólios mensais tomando por base os modelos apresentados neste estudo.

Nesse período total de dez anos, de um modo geral, houve uma grande valorização do valor nominal bursátil das companhias listadas no IBOVESPA, como pode ser visto na tabela 1. O IBOVESPA (IBVSP) alcançou o patamar de 522,2% de valorização nominal, apontando para um retorno médio nominal mensal (conforme equação (1)) de 1,4%, com um desvio-padrão de 8,4%. Da amostra selecionada aleatoriamente de quatorze ações, tem-se títulos que acumularam um retorno nominal de 2.569,42% (CSNA3), enquanto que há títulos que acumularam retornos negativos, como é o caso da TCSL4 (-18,42%).

Como forma de identificar o poder explicativo da amostra, considere-se a situação hipotética de que no dia final de dezembro de 1998 foi composto um portfólio ( $P_u$ ), baseado na distribuição uniforme de pesos entre as quatorze ações selecionadas. Essa carteira teria obtido uma valorização nominal acumulada até 31 de janeiro de 2009 da ordem de 875,3%, superando o IBOVESPA em mais de 350%. Em termos de risco, o portfólio hipotético  $P_u$  apresentaria um desvio-padrão (considerando-se a equação (5) para o último período) cerca de 0,9% mais baixo que o do IBOVESPA.

No caso de se considerar a segregação dos períodos, verifica-se que o portfólio

hipotético  $P_u$  superaria o IBOVESPA em mais de 340% no sub-período-base; enquanto que no sub-período subsequente (fase experimental), o portfólio hipotético  $P_u$  seria superado pelo IBOVESPA em pouco mais de 12%. Com relação ao risco, em ambos os períodos o portfólio hipotético  $P_u$  apresentou um risco menor em comparação ao IBOVESPA.

Como os dados expostos na tabela 1 mostram situações em que o portfólio de diversificação máxima  $P_u$  e o índice IBOVESPA apresentam relações de risco e retorno transitórias, entende-se que a análise empírica encontra uma boa base experimental para a análise comparativa de modelos de otimização de portfólios estudados neste artigo.

**Tabela 1 – Rentabilidade Acumulada, Média e Risco no Período de Jan-99 a Dez-09.**

Período	IBVSP	$P_u$	VALE5	PETR4	CSNA3	CMIG4	ITSA4	EMBR3	CPL6	CRUZ3	TCSL4	ELET3	TNLP3	SBSP3	LAME4	TLPP4
Jan99-Dez09	522,2%	875,3%	1889,0%	1215,9%	2569,4%	318,8%	1834,2%	158,4%	126,6%	116,4%	-18,4%	13,4%	231,7%	85,5%	1880,8%	145,7%
Retorno Médio	1,4%	1,7%	2,3%	2,0%	2,5%	1,1%	2,3%	0,7%	0,6%	1,9%	-0,2%	0,1%	0,9%	0,5%	2,3%	0,7%
Desvio Padrão	8,4%	7,5%	10,8%	10,7%	13,2%	10,3%	9,5%	15,3%	10,8%	9,1%	14,3%	12,9%	12,0%	12,2%	17,5%	9,7%
Jan99-Dez06	358,8%	692,2%	1327,1%	1022,7%	1171,3%	231,6%	1336,9%	683,0%	49,7%	617,4%	44,6%	-16,0%	252,5%	109,7%	2055,4%	151,2%
Retorno Médio	1,6%	2,2%	2,8%	2,6%	2,7%	1,3%	2,8%	2,2%	0,4%	2,1%	0,4%	-0,2%	1,3%	0,8%	3,3%	1,0%
Desvio Padrão	8,5%	8,0%	11,1%	10,0%	13,3%	11,2%	9,5%	16,1%	11,7%	9,9%	14,9%	14,3%	13,0%	13,1%	18,7%	10,8%
Jan07-Dez09	35,6%	23,1%	39,4%	17,2%	110,0%	26,3%	34,6%	-67,0%	51,4%	76,1%	-43,6%	34,9%	-5,9%	-11,6%	-8,1%	-2,2%
Retorno Médio	0,8%	0,6%	0,9%	0,4%	2,1%	0,7%	0,8%	-3,0%	1,2%	1,6%	-1,6%	0,8%	-0,2%	-0,3%	-0,2%	-0,1%
Desvio Padrão	8,2%	5,9%	9,7%	12,2%	13,1%	7,7%	9,4%	12,3%	7,9%	6,6%	12,6%	8,3%	8,9%	9,5%	13,6%	5,4%

Fonte: Adaptado de BMFBOVESPA (2010)

### 3.2 Considerações técnicas da análise

Foram implementados quatro modelos de otimização, para realizar a análise empírica:

- Modelo de otimização de Sharpe: foi implementado de acordo com a equação (12), a fim de fornecer seu retorno esperado  $\bar{r}_p$  como referência para o nível de retorno esperado  $\bar{r}_{pd}$  incluído nas restrições dos demais modelos. Esse procedimento foi adotado como uma forma de se modelar de forma exógena e objetiva a atitude de um investidor-padrão ante à exposição ao risco;
- Modelo de otimização clássico de Markowitz: foi operacionalizado conforme a equação (6), tendo como objetivo fornecer um portfólio que combinasse a minimização do risco condicionado ao nível desejado de desempenho  $\bar{r}_{pd}$ ;
- Modelo de otimização de entropia relativa mínima: foi implementado de acordo com a equação (19), visando apresentar um portfólio resultante da minimização da diferença dos níveis de entropia entre uma distribuição de pesos uniforme e uma nova distribuição, sendo esta última condicionada ao nível desejado de retorno  $\bar{r}_{pd}$ ;
- Modelo de otimização de entropia máxima: foi operacionalizado de acordo com a equação (22), com o objetivo de fornecer um vetor de pesos que combinasse a entropia máxima conjunta dos vetores de pesos e de retornos aleatórios dos títulos analisados.

Todos os modelos foram submetidos às restrições de unidade do somatório do vetor de pesos e de não-negatividade dos pesos, sendo que essa última caracteriza a impossibilidade de vendas a descoberto. Além dessas questões, tem-se as seguintes considerações:

- Todos os modelos utilizados são de programação estática. Embora haja modelos de programação dinâmica, que podem formular projeções para períodos múltiplos, optou-se por manter os pressupostos da metodologia clássica de Markowitz, significando que os portfólios foram recalculados e rebalanceados a cada período. Os portfólios foram constituídos no final de cada mês e projetados para o final do mês seguinte. Por exemplo, a primeira projeção de portfólios ocorreu no final de dezembro de 2006 ( $D_0$ ) e foi relativa ao mês de janeiro seguinte ( $D_1$ );
- Seguindo essa forma de rebalanceamento mensal, as matrizes de covariâncias foram recalculadas em cada um dos meses do período experimental, sempre tendo

como base o mês de janeiro de 1999 e incorporando o mês imediatamente anterior ao de cada novo mês projetado. Como exemplo, a primeira projeção de portfólios foi baseada na matriz de covariâncias calculada para o período de janeiro de 1999 a dezembro de 2006. Já a segunda projeção considerou a matriz de covariâncias calculada para o período de janeiro de 1999 a janeiro de 2007. Assim, adotou-se o procedimento de que a base informacional das matrizes de covariâncias sofreria acréscimos ao longo do tempo, mas que teria base fixa em janeiro de 1999. Entendeu-se que esse procedimento permitiu que os modelos incorporassem mais informação para balizar as projeções, em comparação com uma situação na qual o tamanho da base da matriz fosse mantido constante, o que ocorreria se a base das matrizes de covariâncias fosse móvel;

- Por conseguinte, os pesos dos portfólios foram rebalanceados mensalmente em função das recomendações dos modelos, sendo que a cada mês teve-se a inclusão de novas informações sobre o risco das distribuições, dado a base de dados das matrizes de covariâncias foram expandidas, como mencionado anteriormente;
- Não foram considerados os custos de transação relativos aos rebalanceamentos.

### 3.3 Análise dos resultados dos modelos implementados

Na análise comparativa dos modelos implementados foram considerados os seguintes procedimentos de cálculo:

- a) Índices de retornos nominais mensais ( $r_p = \sum_{i=1}^{14} w_i r_{it}$ ) e acumulados  $\left[ r_{a_p} = \prod_{t=0}^{35} (1 + r_{p_t}) \right]$  dos portfólios, como ponto de partida da análise;

- b) Índice de Sharpe: foi utilizado para mensurar o excesso de retorno esperado dos portfólios calculados em comparação com seus níveis de risco. Esse índice apresenta uma relação com o mercado, ao considerar o excesso de retorno do portfólio sobre o ativo livre de risco. Esse índice é calculado pela fórmula  $\theta = E(r_p) - r_f / \sigma_p$ , que não deve ser confundida com o processo de otimização de Sharpe para o cálculo de  $\bar{r}_{pd}$ . Como *proxy* da taxa de retorno livre de risco  $r_f$  foi adotada a taxa SELIC mensal. O índice de Sharpe foi empregado na análise *a priori*, com o objetivo de mensurar a eficiência preditiva dos modelos no âmbito das relações de risco e retorno, e na análise *a posteriori*, para medir o desempenho efetivo dos portfólios. Para essa segunda função, a fórmula foi adaptada para  $\theta_{ap} = (1/T \cdot \sum_{t=1}^T (r_{p_t} - r_{f_t})) / \sigma_{(r_{p_t} - r_{f_t})}$ ;

- c) Parâmetros Alfa e Beta: que foram obtidos a partir da análise de regressão linear simples entre os retornos efetivos dos portfólios ( $r_{pt}$ ) e os retornos do IBOVESPA ( $r_{mt}$ ):

$$(24) \quad r_{pt} = \alpha + \beta r_{mt} + \varepsilon_t$$

onde  $\varepsilon_t$  é o termo de erro aleatório. A estimação desses parâmetros objetiva analisar o desempenho comparativo dos fundos com os níveis de rentabilidade do mercado;

- d) Índice do grau de diferenciação dos portfólios: foi aplicado a partir da proposta de Goetzmann e Kumar (2001):

$$(25) \quad D_t = \sum_{i=1}^N (w_i - w_u)^2$$

e foi calculado para cada período  $t$ , onde  $w_u$  é peso de um portfólio de mercado completamente diversificado, ou seja, com distribuição de pesos uniforme ( $w_u = 1/N_u$ ). Quanto mais baixo for o valor de  $D_t$ , mais alto será o nível de diversificação do portfólio.

Os procedimentos de otimização adotados produziram vetores de pesos para cada um dos períodos projetados, aplicados na composição dos seguintes portfólios:

- $p_1$ : portfólio composto através do modelo clássico de Markowitz;
- $p_2$ : portfólio constituído através do modelo de entropia relativa mínima; e
- $p_3$ : portfólio formado através do modelo de entropia máxima.

Os processos de otimização foram implementados por meio do Microsoft Excel<sup>TM</sup> Solver<sup>TM</sup>, que segundo Kwan (2001) possui algoritmos eficientes para a resolução de problemas de programação quadrática e não-linear.

Como a tabulação dos resultados gerou tabelas muito extensas, optou-se por apresentar um recorte dos resultados do último trimestre processado, como pode ser visto na tabela 2. Nessa tabela, pode-se visualizar os pesos calculados para as quatorze ações da amostra, o valor do retorno desejado para o portfólio ( $r_{pd}$ ), que é oriundo do processo de otimização do modelo de Sharpe (12), o retorno esperado do portfólio proposto ( $E(r_p)$ ), o valor do risco como variância ( $\sigma_p^2$ ) e desvio-padrão ( $\sigma_p$ ) do portfólio e os retornos nominais obtidos.

**Tabela 2 – Recortes de Resultados dos Modelos de Otimização Aplicados.**

	Modelo de Markowitz ( $p_1$ )			Modelo Entrópico 1 ( $p_2$ )			Modelo Entrópico 2 ( $p_3$ )		
$D_0$	set/09	out/09	nov/09	set/09	out/09	nov/09	set/09	out/09	nov/09
$D_1$	out/09	nov/09	dez/09	out/09	nov/09	dez/09	out/09	nov/09	dez/09
$w_{vale5}$	0,1555	0,1716	0,1788	0,6198	0,6092	0,5881	0,1140	0,1137	0,1137
$w_{petr4}$	0,0745	0,0778	0,0889	0,0602	0,0594	0,0610	0,0599	0,0599	0,0599
$w_{csna3}$	0,1193	0,1277	0,1146	0,0870	0,0840	0,0814	0,0648	0,0647	0,0648
$w_{emig4}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0141	0,0210	0,0247	0,0659	0,0658	0,0658
$w_{itsa4}$	0,2974	0,2736	0,2839	0,0727	0,0676	0,0690	0,0582	0,0584	0,0583
$w_{embr3}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0044	0,0077	0,0091	0,0656	0,0657	0,0658
$w_{cpfle6}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0002	0,0059	0,0582	0,0582	0,0582
$w_{cruz3}$	0,3494	0,3465	0,3275	0,0630	0,0617	0,0595	0,0838	0,0838	0,0841
$w_{tcs14}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0002	0,0008	0,0741	0,0742	0,0741
$w_{elet3}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0002	0,0008	0,0612	0,0613	0,0612
$w_{tnlp3}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0072	0,0150	0,0189	0,1011	0,1010	0,1009
$w_{sbsp3}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0002	0,0008	0,0554	0,0554	0,0555
$w_{lame4}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0681	0,0650	0,0694	0,0757	0,0757	0,0756
$w_{tlpp4}$	0,0040	0,0028	0,0063	0,0007	0,0088	0,0104	0,0622	0,0621	0,0622
$r_{pd}$	0,0215	0,0219	0,0218	0,0215	0,0219	0,0218			
$E(r_p)$	0,0215	0,0219	0,0218	0,0215	0,0219	0,0218	0,0128	0,0126	0,0130
$\sigma_p^2$	0,0054	0,0053	0,0053	0,0077	0,0076	0,0074	0,0058	0,0058	0,0057
$\sigma_p$	0,0733	0,0730	0,0729	0,0879	0,0872	0,0859	0,0760	0,0758	0,0756
$r_p$	0,0015	0,0419	-0,0100	0,0528	0,0732	0,0000	-0,0112	0,0708	0,0413
$ra_p$	1,3626	1,4197	1,4054	1,2551	1,3470	1,3470	1,1178	1,1969	1,2464

Fonte: Elaboração do autor

### 3.3.1 Análise dos retornos nominais mensais e acumulados

Os retornos nominais mensais e acumulados dos portfólios propostos pelos modelos  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  estão apresentados nas tabelas 3 e 4.

Durante o período experimental, o portfólio proposto pelo modelo clássico de Markowitz apresentou o maior retorno nominal acumulado, de cerca de 40,54%, seguido do modelo de entropia relativa mínima (34,70%) e do modelo de entropia máxima (24,64%).

**Tabela 3 – Retornos Nominais Mensais dos Portfólios Estimados.**

Mês	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07	jan/08	fev/08	mar/08	abr/08	mai/08	jun/08
$r_{p1}$	5,4%	-0,5%	5,4%	5,5%	6,4%	0,6%	1,9%	0,3%	15,0%	6,6%	-1,5%	0,9%	-8,4%	7,1%	-3,4%	10,6%	7,2%	-10,9%
$r_{p2}$	6,7%	2,0%	4,8%	6,3%	5,6%	0,9%	4,3%	1,6%	17,4%	5,5%	-4,7%	-1,2%	-9,6%	9,0%	-1,9%	5,7%	3,7%	-13,0%
$r_{p3}$	1,6%	-1,2%	4,3%	5,5%	6,1%	4,5%	-2,7%	2,3%	6,2%	5,0%	-5,6%	-1,8%	-4,1%	6,1%	-4,9%	3,2%	4,7%	-9,9%
Mês	jul/08	ago/08	set/08	out/08	nov/08	dez/08	jan/09	fev/09	mar/09	abr/09	mai/09	jun/09	jul/09	ago/09	set/09	out/09	nov/09	dez/09
$r_{p1}$	-12,9%	-5,9%	-8,6%	-26,5%	5,8%	-1,4%	4,3%	-2,7%	5,0%	12,1%	9,4%	-1,6%	9,4%	0,1%	8,1%	0,2%	4,2%	-1,0%
$r_{p2}$	-12,1%	-6,8%	-13,3%	-24,9%	-2,2%	-0,8%	13,5%	-4,2%	3,2%	14,7%	7,8%	-6,7%	8,3%	1,6%	9,7%	5,3%	7,3%	0,0%
$r_{p3}$	-6,0%	-4,5%	-6,3%	-18,8%	2,2%	-1,3%	2,7%	-2,6%	5,3%	13,4%	5,9%	-5,7%	6,7%	2,0%	6,3%	-1,1%	7,1%	4,1%

Fonte: Elaboração do autor

**Tabela 4 – Retornos Nominais Acumulados dos Portfólios Estimados.**

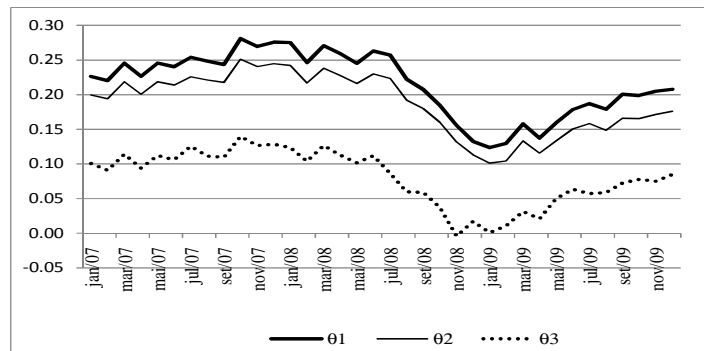
Mês	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07	jan/08	fev/08	mar/08	abr/08	mai/08	jun/08
$ra_{p1}$	1,0544	1,0495	1,1060	1,1664	1,2406	1,2480	1,2712	1,2751	1,4664	1,5637	1,5410	1,5542	1,4231	1,5241	1,4728	1,6283	1,7461	1,5556
$ra_{p2}$	1,0667	1,0884	1,1409	1,2123	1,2804	1,2921	1,3480	1,3702	1,6084	1,6975	1,6176	1,5978	1,4443	1,5750	1,5456	1,6336	1,6946	1,4747
$ra_{p3}$	1,0165	1,0044	1,0480	1,1053	1,1728	1,2253	1,1922	1,2200	1,2951	1,3602	1,2844	1,2607	1,2093	1,2830	1,2204	1,2601	1,3199	1,1890
Mês	jul/08	ago/08	set/08	out/08	nov/08	dez/08	jan/09	fev/09	mar/09	abr/09	mai/09	jun/09	jul/09	ago/09	set/09	out/09	nov/09	dez/09
$ra_{p1}$	1,3553	1,2750	1,1658	0,8565	0,9066	0,8938	0,9324	0,9069	0,9526	1,0683	1,1684	1,1498	1,2578	1,2586	1,3605	1,3626	1,4197	1,4054
$ra_{p2}$	1,2963	1,2086	1,0483	0,7876	0,7701	0,7641	0,8669	0,8302	0,8570	0,9831	1,0598	0,9888	1,0704	1,0871	1,1922	1,2551	1,3470	1,3470
$ra_{p3}$	1,1180	1,0677	1,0006	0,8120	0,8297	0,8186	0,8405	0,8190	0,8625	0,9785	1,0363	0,9771	1,0426	1,0631	1,1304	1,1178	1,1969	1,2464

Fonte: Elaboração do autor

### 3.3.2 Análise da relação de risco e retorno através do índice de Sharpe

A utilização do índice de Sharpe *a priori*, conforme exposto na figura 1, demonstrou que o modelo clássico de Markowitz ( $\theta_1$ ) foi o de maior eficiência preditiva em comparação com os modelos de entropia relativa mínima ( $\theta_2$ ) e entropia máxima ( $\theta_3$ ).

O hiato entre o modelo de Markowitz e os modelos baseados na entropia ficou praticamente constante durante o período de análise, independente das fases do mercado.

**Figura 1 – Índices de Sharpe de Desempenho *a Priori***

Elaboração do autor

Na análise da eficiência do desempenho dos portfólios *a posteriori*, (vide tabela 5), o modelo clássico de Markowitz apresentou a melhor relação de excesso de retorno ajustado ao risco. E, enquanto que o modelo de entropia relativa mínima também apresentou uma boa relação de risco e retorno, o modelo de entropia máxima apresentou um desempenho negativo, dado que seu retorno médio foi inferior ao retorno médio do ativo livre de risco.

**Tabela 5 – Índices de Sharpe de Desempenho *a Posteriori*.**

	$p_1$	$p_2$	$p_3$
Média ( $r_p - r_f$ )	0,0038	0,0031	-0,0010
$\sigma_{p-rf}$	0,0794	0,0861	0,0609
$\theta_{ap}$	0,0475	0,0358	-0,0169

Fonte: Elaboração do autor

### 3.3.3 Análise da relação de risco e retorno através dos parâmetros Alfa e Beta

A estimação dos parâmetros da regressão entre os retornos nominais dos portfólios calculados e os retornos do índice de mercado apresentou os resultados expostos na tabela 6.

O modelo de Markowitz apresentou o melhor coeficiente Alfa ( $\alpha$ ), mostrando que o portfólio teve um rendimento médio mensal positivo de 0,17%, independente das movimentações do mercado. Nesse quesito, o modelo de entropia relativa mínima teve um coeficiente Alfa de 0,04% e o de entropia máxima de -0,05%; nesse último caso, indicando que o portfólio apresentou uma perda mensal autônoma em relação ao mercado de 0,05%.

Em termos do coeficiente Beta ( $\beta$ ), tem-se que os modelos clássico de Markowitz e de entropia relativa mínima apresentaram níveis de risco muito próximos ao risco do mercado, cujos parâmetros foram estimados com alta significância estatística. Nessas circunstâncias, prevê-se que a cada variação de 1% no retorno do índice de mercado, haverá uma variação de cerca 0,9214% nos retornos dos portfólios compostos a partir de Markowitz e de cerca de 0,9710% nos retornos dos portfólios compostos pelo modelo de entropia relativa mínima. Já o modelo de entropia máxima apresentou um nível de risco de mercado moderado, cujos retornos seguiriam em 0,7057% uma movimentação de 1% no retorno do índice de mercado.

**Tabela 6** – Parâmetros Estimados e Estatísticas das Análises de Regressão.

	$p_1$	$p_2$	$p_3$
$\alpha$	0,0017	0,0004	-0,0005
$\beta$	0,9214	0,9710	0,7057
estatística $t$	16,9868	13,6186	17,0688
$r^2$	0,8946	0,8451	0,8955

Fonte: Elaboração do autor

Alguns autores afirmam que o coeficiente de determinação ( $r^2$ ) pode ser considerado como uma medida de diversificação do portfólio, pois mensura o quanto a variância do retorno esperado do portfólio é explicada pela variabilidade do retorno do índice de mercado. Caso essa consideração seja levada a efeito, todos os portfólios propostos neste estudo teriam um alto índice de diversificação, pois mais de 80% de sua variabilidade acompanha as movimentações do mercado.

No entanto, o coeficiente de determinação pode ser questionado como medida de diversificação, dado que os índices de mercado são compostos por um número muito pequeno de empresas diante do universo bursátil e pelo fato de que, em situações de crise, há uma maior tendência de que os movimentos da maior parte das ações acompanhem o mercado, o que poderia justificar os altos coeficientes obtidos nesse período de análise.

### 3.3.4 Análise do grau de diferenciação dos portfólios

A metodologia de mensuração do grau de diferenciação de portfólios de Goetzmann e Kumar (2001), cujos resultados podem ser acompanhados na tabela 7 e na figura 3, mostrou que o modelo de entropia máxima apresentou o maior grau de diversificação, com um índice médio de 0,0042; ou seja, muito próximo da diversificação máxima.

Esse resultado já era esperado, dado que a formulação do modelo apontava para esse objetivo. Causou surpresa o resultado obtido pelo modelo de entropia relativa mínima, que apresentou um grau de diversificação cerca de duas vezes maior que o do modelo clássico de Markowitz.

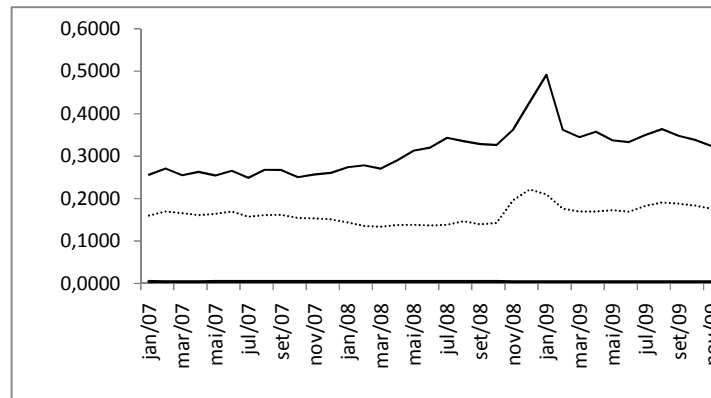
A explicação para essa situação situa-se no âmbito das restrições a que os modelos de otimização entrópica foram submetidos. Enquanto que o modelo de entropia máxima foi condicionado somente pela unidade do somatório do vetor de pesos e pela não-negatividade

dos pesos, o modelo de entropia relativa mínima foi, adicionalmente, submetido à condição de ter de apresentar um determinado nível de retorno desejado.

**Tabela 7 – Índices Médios de Diversificação dos Portfólios.**

$D$	$p_1$	$p_2$	$p_3$
Média	0,1636	0,3121	0,0042
$\sigma$	0,0209	0,0532	0,0003

Fonte: Elaboração do autor



**Figura 3 – Índices Mensais de Diversificação de Portfólios.**

Elaboração do autor

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mesmo que tenha decorrido mais de cinquenta anos desde a criação da Moderna Teoria do Portfólio, as características fundamentais do modelo clássico de Markowitz ainda podem ser testadas diante dessa nova configuração econômica mundial e produzir bons resultados.

Ao se comparar o modelo de Markowitz com dois modelos construídos para representar novas configurações de risco com base na otimização entrópica, este estudo concluiu pela superioridade do primeiro. Além do modelo de Markowitz apresentar o melhor rendimento nominal acumulado, ele apresentou a melhor eficiência preditiva e o melhor desempenho efetivo, quando considerado o *trade-off* entre risco e retorno.

Mas, quando se trata de diversificação, as preocupações originais com relação ao modelo de Markowitz foram confirmadas. O modelo de Markowitz concentrou seus pesos em apenas cinco dos quatorze ativos da amostra. O que causou surpresa na análise comparativa, foi o fato do modelo de entropia relativa mínima ter apresentado um grau de diversificação ainda menor que o de Markowitz. Por exemplo, em um determinado mês, esse modelo chegou a concentrar cerca de 74% dos pesos em um ativo. O comportamento inesperado desse modelo entrópico pode ser explicado pela restrição de desempenho desejado que foi estabelecida em sua formulação. Por essa razão, o modelo precisou respeitar essa condição, sacrificando o desempenho de sua função-objetivo.

Na contra-mão desses dois modelos, o modelo de entropia máxima apresentou um grau de diversificação bem próximo do nível máximo, que seria a situação mais coerente com os preceitos de diversificação de Markowitz. No entanto, esse modelo apresentou os piores resultados na análise comparativa de desempenho.

É importante salientar que os resultados desse estudo precisam ser interpretados à luz do contexto temporal em que foi baseado e das limitações do IBOVESPA como um índice que representa o mercado de ações brasileiro.

Novos estudos podem ser desenvolvidos, procurando estudar outros períodos de análise, outros mercados, outros índices de mercado e a inclusão de outros tipos de ativos

financeiros. Além disso, novos estudos podem considerar rebalanceamentos em períodos maiores (anuais) e menores. Neste último caso, poderão ser estudados efeitos também no *intraday*, desde que sejam considerados os custos de transação. Outros trabalhos poderiam, ainda, comparar os modelos aplicados neste estudo a modelos de risco *downside* e de períodos múltiplos, estes últimos baseados em programação dinâmica.

## REFERÊNCIAS

- BAWA, V. Stochastic Dominance: A Research Bibliography. *Management Science*, v. 28, n. 6, p. 698-712, 1982.
- BERA, A. K.; PARK, S. Y. Optimal Portfolio Diversification Using the Maximum Entropy Principle. *Econometric Reviews*, v. 27, n. 4-6, p. 484-512, 2008.
- BMFBOVESPA, Bolsa de Mercadorias & Futuros e Bolsa de Valores de São Paulo. *Cotações históricas*. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/shared/iframe.aspx?idioma=pt-br&url=http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/cotacoes-historicas/FormSeriesHistoricas.asp>. Acesso em 27 abr 2010.
- CASSETTARI, A. O Princípio da Máxima Entropia e a Teoria das Carteiras. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 1, n. 2, p. 271-300, 2003.
- GOETZMANN, W. N.; KUMAR, A. Equity Portfolio Diversification. *NBER Working Paper* 8696, National Bureau of Economic Research, Cambridge, 2001. Disponível em: <http://web.econ.unito.it/nicodano/w8686.pdf>. Acesso em 25 abr 2010.
- HUA, L.; XINGSI, L. A New Portfolio Model and Application. *Operations Research and Management Science*, v. 6, p. 83-86, 2003.
- JESSOP, A. Entropy in Multiattribute Problems. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, v. 8, n. 2, p. 61-70, 1999.
- KWAN, C. C. Y. Portfolio Analysis Using Spreadsheet Tools. *Journal of Applied Finance*, v. 11, p. 70-81, 2001.
- MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.
- MARKOWITZ, H. M. *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*. New Jersey: John Wiley & Sons, 1959.
- MARKOWITZ, H. M. *Mean-Variance analysis and portfolio choice and capital market*. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- OGRYCZAK, W; RUSZCZYNSKI, A. From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures. *European Journal of Operational Research*, v. 116, n. 1, p. 33-50, 1999.
- PHILIPPATOS, G. C.; WILSON, C. J. Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Applied Economics*, v. 4, p. 209-220, 1972.



PHILIPPATOS, G. C.; WILSON, C. J. Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios: Reply. *Applied Economics*, 6, p. 77-81, 1974.

RÖDDER, W. Conditional logic and the Principle of Entropy. *Artificial Intelligence*, v. 117, p. 83-106, 2000.

RUBINSTEIN, M. Markowitz's "Portfolio Selection": A Fifty-Year Retrospective". *The Journal of Finance*, v. 57, n. 3, p. 1041-1045, 2002.

SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, v. 9, n. 2, p. 277-293, 1963.

SHARPE, W. F. Capital Asset Prices: A theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

SHARPE, W. F. Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, v. 39, n. 1, Part 2: Supplement on Security Prices, p. 119-138, 1966.

SHANNON, C. E.. A Mathematical Theory of Communication. *The Bell System Technical Journal*, v. 27, p. 379-423, 1948.

STEINBACH, M. C. Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 43, n. 1, p. 31-85, 2001.

WHITE, C. J. Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios: Reply. *Applied Economics*, v. 6, p. 73-75, 1974.